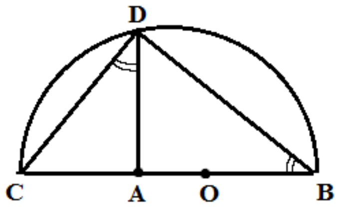
Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018год.

Вариант 1.

1) Пусть дан отрезок AB длины 7. На продолжении отрезка AB за точку A отложим отрезок $AC = \frac{1}{7}AB$ (деление отрезка на n равных частей относится к числу элементарных построений). На отрезке CB, как на диаметре, построим полуокружность (это также элементарное построение!) и из точки A восставим перпендикуляр AB до пересечения с этой окружностью в точке D (см.рис.ниже).



Тогда $AD = \sqrt{CA * AB} = \sqrt{7}$ т.к. угол D – прямой и в силу подобия (по равенству углов) треугольников CAD и DAB имеем: $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$, т.е. $AD = \sqrt{7}$.

2) Данное равенство должно выполнятся для любого x, в том числе для $x_2 = \frac{x}{2x-1}$. Отсюда находим, что $x = \frac{x_2}{2x_2-1}$. Поэтому получим $f\left(\frac{x_2}{2x_2-1}\right) + \frac{x_2}{2x_2-1}f(x_2) = 2$. Переобозначая x_2 через переменную x, получим систему равенств:

$$\begin{cases} f(x) + xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) = 2 \\ f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) + \dfrac{x}{2x-1}f(x) = 2 \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$. Проверка показывает, что эта функция есть решение данного уравнения. Ответ: $\frac{4x-2}{x-1}$.

3) Обозначим $2x - 2y + 3z - 3 = A, 4z - x - 3y = B, 5y - x - 7z + 6 = C$. Находим, что A+B+C = 3. По условию x, y, z – целые числа, поэтому $A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1 \Longrightarrow A = 1, B = 1, C = 1$. А тогда получаем неравенство $y^2 - 4y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 4 \Rightarrow y = \{1,2,3\}$.
Решим систему $A = 1, B = 1$. Выразим неизвестные x, z через y. Получим $x = \frac{13-y}{11}; z = \frac{8y+6}{11}$. Из этих равенств получим, что x, z будут целыми лишь при $y = 2, x = 1, z = 2$. Таким образом, ответ: $(1; 2; 2)$.

4) Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-3)} \leq 0$. Решая его методом интервалов, находим с учетом ОДЗ: Ответ: $x < -1; 0 \leq x < 1; 2 \leq x < 3$.

5) $(1 - \cos^2\alpha)\cos^6\alpha = (1 - y)y^3$, где $y = \cos^2\alpha$. Найдем $\max f(y) = y^3 - y^4$ при $0 \leq y \leq 1$. Имеем $f'y = 3y^2 - 4y^3$. Тогда критическая

точка $y=\frac{3}{4}$. В этой точке $f(y)$ имеет максимум. $fmax=\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^3*\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$. Так как $maxf(y)=\frac{27}{256}$, то для любой другой точки $f(y)<\frac{27}{256}$, что и требовалось доказать.

6) Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры шаров, лежащие внутри правильного тетраэдра. Так как каждый шар касается трех других шаров, то центры этих шаров образуют правильный тетраэдр O_1, O_2, O_3, O_4 со стороной равной $2r$, где r – радиус искомых шаров. С другой стороны, каждый шар по условию также касается трех граней исходного тетраэдра, поэтому расстояние от любой грани тетраэдра O_1, O_2, O_3, O_4 до грани исходного тетраэдра равно r, а сами грани параллельны граням исходного тетраэдра. Известно, что радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр со стороной a, равен $R=\frac{a\sqrt{6}}{12}$. А так как радиус шара, вписанного в данный тетраэдр на r больше радиуса шара, вписанного во второй тетраэдр O_1, O_2, O_3, O_4, с ребром $2r$, то
$$\frac{a\sqrt{6}}{12}=\frac{2r\sqrt{6}}{12}+r \Rightarrow r=\frac{a\left(\sqrt{6}-1\right)}{10}=1$$
Ответ: $\{1\}$.

7) Преобразуем первую часть равенства. $1111111122222222=\frac{10^{16}-1}{9}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{(10^8-1)(10^8+1)}{9}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{10^8-1}{9}*(10^8+2)=\frac{10^8-1}{3}*\frac{10^8+2}{3}$.
Покажем, что число $\frac{10^8-1}{3}$ есть корень данного уравнения.
Действительно, подставляя $x=\frac{10^8-1}{3}$ в уравнение, получим: $\left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2+\frac{10^8-1}{3}=\frac{10^8-1}{3}*\left(\frac{10^8-1}{3}+1\right)=\frac{10^8-1}{3}*\frac{10^8+2}{3}$, т.е. равно правой части уравнения. А тогда второй корень будет равен: $-\frac{10^8+2}{3}$.
Ответ: $\left\{\frac{10^8-1}{3};-\frac{(10^8+2)}{3}\right\}$.

8) Преобразуя уравнение, получим: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}+a\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0$. В ОДЗ уравнение симметрично относительно замены x на $\frac{1}{x}$. Поэтому, если x_0 – решение, то $\frac{1}{x_0}$ - также решение. А тогда в силу единственности должно быть $\frac{1}{x}=x$, т.е. $x=\pm1$. Найдем при $x=\pm1$ соответствующие значения параметра a и проверим достаточность.
При $x=-1$ получаем $a^2+a-\frac{3}{4}=0, a=-\frac{3}{2}$, $a=\frac{1}{2}$. Разберем эти два случая. При $a=-\frac{3}{2}$ имеем уравнение: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}\geq 2^{-\frac{2}{2}}=-1+\frac{3}{2}cos\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Функция в уравнении слева ограничена снизу: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} \geq 2^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}$; функция справа ограничена сверху: $-1 + \frac{3}{2}\left(cosx - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2}$. Поэтому равенство возможно лишь при:

а) $\begin{cases} 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = \frac{1}{2} \\ -1 + \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{1}{x}+x=-2 \\ \cos\left(x-\frac{1}{x}\right)=1 \end{matrix} \Rightarrow x = -1$, значит $a = -\frac{3}{2}$ подходит.

б) при $a = \frac{1}{2}$ имеем $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = 1 - \frac{1}{2}\left(cosx - \frac{1}{x}\right)$. Покажем, что это уравнение кроме решения $x = -1$ имеет на интервале $(-1; 0)$ еще решение. Пусть $f(x) = 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}, r(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)$. На интервале $(-1,0)$ обе функции непрерывны, а функция $f(x)$ ограничена: $\frac{1}{2} < f(x) < 1$. Далее, так как при изменении x от -1 до 0 функция $R(x) = x - \frac{1}{x}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, то в силу периодичности косинуса, функция $r(x)$ бесконечное число раз проходит от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$ и обратно. Следовательно, уравнение $f(x) = r(x)$ имеет бесконечное число решений на интервале $(-1; 0)$. Поэтому $a = \frac{1}{2}$ не подходит. При $x = 1$ получаем $2 + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a + \frac{3}{4} = 0 \Longrightarrow D < 0$ решений нет, т.е. $x = 1$ не является решением ни при каком а.

Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.